Gravitačný zákon

1 Akou veľkou silou pôsobí Mesiac na 1 m^3 morskej vody (ρ = 1013 $kg.m^{-3}$) na povrchu Zeme.

Riešenie:

m(H2O)=1013 kg, m_M =7,4.10^{22}kg, r = 3,84.10^8m, κ = 6,67.10^{-11}N.m^2.kg^{-2}

$$F_g = \frac{\kappa.m(H_2O).m_M}{r^2}$$

$$F_g = \frac{6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}.1013kg.7{,}4.10^{22}\,kg}{(3{,}84.10^8\,m)^2} = \frac{50.10^{14}\,N.m^2}{14{,}74.10^{16}\,m^2} = 0{,}034\,N$$

Mesiac priťahuje 1 m3 morskej vody silou asi 0,034 N.

2

Akou silou je priťahovaný Mesiac k Zemi, ak m_Z= 6.10^{24}kg, m_M = 7,4.10^{22}kg. Vzdialenosť medzi Zemou a Mesiacom je 3,84.10^8m.

Riešenie:

$$m_Z = 6.10^{24}\,kg,\; m_M = 7{,}4.10^{22}\,kg, r = 3{,}84.10^8\,m,\; \kappa = 6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$$

$$F_g = \frac{\kappa.m_1.m_2}{r^2}$$

$$F_g = \frac{6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}\,6.10^{24}\,kg,7{,}4.10^{22}\,kg}{(3{,}84.10^8\,m)^2} = 2{,}05.10^{20}\,N$$

Mesiac je k Zemi priťahovaný silou 2,05.10^{20}N.

3

Dve rovnaké gule sa dotýkajú a pôsobia na seba gravitačnou silou F_g = 4,16.10^{-4} N. Aké majú polomery R, ak každá má rovnakú hmotnosť 4 tony?

Riešenie:

$m_1 = m_2 = 4t = 4.10^3 kg$, $F_g = 4,16.10^{-4} N$, $\kappa = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$, $r = 2R$,

$$F_g = \frac{\kappa . m_1 . m_2}{r^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{\kappa . m_1^2}{F_g}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2} (4.10^3 kg)^2}{4,16.10^{-4} N}} = \sqrt{\frac{106,72.10^{-5} Nm^2}{4,16.10^{-4} N}} =$$

$$= \sqrt{25,654.10^{-1} m^2} = \sqrt{2.5654 m^2} = 1,6m$$

$$2R = r$$

$$R = \frac{r}{2}$$

$$R = \frac{1,6m}{2} = 0,8m$$

$$R_1 = R_2 = 0,8m.$$

Gule majú polomery $R_1 = R_2 = 0,8$ m

4 Určite hmotnosť Mesiaca a hmotnosť Zeme z týchto údajov:

- Mesiac : $R_M = 1,72.10^6$m, $g_M = 1,67 m.s^{-2}$
- Zem : $R_Z = 6,378.10_6$m, $g_Z = 10 m.s^{-2}$

Riešenie:

Mesiac :

$$g_M = \frac{\kappa . m_M}{R_M^2}$$

$$m_M = \frac{g_M . R_M^2}{\kappa} = \frac{1,67 m.s^{-2} (1,72.10^6 m)^2}{6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}} = \frac{4,940.10^{12} m^3.s^{-2}}{6,67.10^{-11} N.m^2 kg^{-2}} = 0,74.10^{23} kg = 7,4.10^{22} kg.$$

Zem :

$$g_Z = \frac{\kappa . m_Z}{R_Z^2}$$

$$m_Z = \frac{g_Z R_Z^2}{\kappa} = \frac{10 m s^{-2} . (6,378.10^6 m)^2}{6,67.10^{-11} N.m^2 kg^{-2}} = \frac{40,6.10^{13} m^3.s^{-2}}{6,67.10^{-11} N.m^2 kg^{-2}} = 6.10^{24} kg.$$

Hmotnosť Mesiaca je $7,4.10^{22}$ kg, Zeme 6.10^{24} kg.

5

Na povrchu Zeme je gravitačné zrýchlenie g = 10 m.s-^{2}. V akej vzdialenosti od povrchu Zeme bude zrýchlenie polovičné?

Riešenie:

$$g' = \frac{g}{2} = 5 m.s^{-2}, \quad m_Z = 6.10^{24} kg, \quad \kappa = 6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}, \quad R_Z = 6{,}378.10^6 m., \quad h = ?$$

$$g' = \frac{\kappa.m_Z}{(R_Z + h)^2}$$

$$(R_Z + h)^2 = \frac{\kappa.m_Z}{g'}$$

$$R_Z + h = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{g'}}$$

$$h = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{g'}} - R_Z = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}\, 6.10^{24} kg,.}{5 m.s^{-2}}} - 6{,}378.10^6 m. =$$

$$= \sqrt{80.10^{12} m^2} - 6{,}378.10^6 m = 8{,}944.10^6 m - 6{,}378.10^6 m = 2{,}566.10^6 m = 2566 km$$

$$h = 2566 km$$

Gravitačné zrýchlenie je polovičné vo vzdialenosti asi 2566 km nad Zemou.

6 Kozmická loď sa pohybuje vo výške 300 km nad Zemou. Určite

- a) gravitačné zrýchlenie na tejto lodi
- b) obežnú rýchlosť kozmickej lode
- c) obežnú dobu lode okolo Zeme

Riešenie:

$m_Z = 6.10^{24}\,kg, \quad R_Z = 6{,}378.10^6\,m, \quad h = 0{,}3.10^6\,m, \quad \kappa = 6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$

$$a) \quad g = \frac{\kappa.m_Z}{(R_Z + h)^2} = \frac{6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}\,6.10^{24}\,kg,}{(6{,}378.10^6\,m + 0{,}3.10^6\,m)^2} = \frac{40{,}02.10^{13}}{44{,}6.10^{12}}\,m.s^{-2} = 8{,}97\,m.s^{-2}$$

$$g = 8{,}97\,ms^{-2}$$

$$b) \quad \frac{m.v^2}{(R_Z + h)} = \frac{\kappa.m.m_Z}{(R_Z + h)^2}$$

$$v^2 = \frac{\kappa.m_Z}{(R_Z + h)}$$

$$v = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{(R_Z + h)}} = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}.6.10^{24}\,kg,}{(6{,}378.10^6\,m + 0{,}3.10^6\,m)}} = \sqrt{59{,}9.10^6}\,m.s^{-1} =$$

$$= 7{,}37.10^3\,m.s^{-1} = 7{,}37\,kms^{-1} \qquad => \quad v = 7{,}37\,kms^{-1}$$

$$c) \quad a = \frac{4\pi^2(R_Z + h)}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(R_Z + h)}{a}} = \sqrt{\frac{4.\pi^2\,6{,}678.10^6\,m}{8{,}97\,ms^{-2}}} = \sqrt{29.10^6\,s^2} = 5{,}4.10^3\,s = 5400\,s = 90\ \mathrm{min}$$

$T = 90\ \mathrm{min}$.

Pohyby v homogénnom gravitačnom poli

1

Charakterizujte pohyby v homogénnom gravitačnom poli Zeme.

Riešenie:

Gravitačné pole siahajúce do malej výšky nad povrchom Zeme (h<< RZ) môžeme považovať za homogénne. Takéto pole má rovnaké hodnoty fyzikálnych charakteristík v každom bode priestoru. Okrem voľného pádu sem patria zvislý vrh nahor, vodorovný vrh a šikmý vrh nahor.

	Poloha telesa v čase t	Maximálne hodnoty
Voľný pád	$v = g.t,\ s = \frac{g.t^2}{2}$	
Zvislý vrh nahor	$v = v_0 - gt, s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$	$t = \frac{v_0}{g} \quad h = \frac{v_0^2}{2g}$
Vodorovný vrh	$x = v_0 t, y = h - \frac{gt^2}{2}$ $v^2 = v_0^2 + (gt)^2$	$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},\ d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$
Šikmý vrh nahor	$x = v_0 t . \cos\alpha$ $y = v_0 t . \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$	$t = \frac{2v_0 . \sin\alpha}{g},\ h = \frac{v_0^2 . \sin^2\alpha}{2g}$ $d = \frac{v_0^2 . \sin 2\alpha}{g}$

2

Teleso padá z výšky 60 m. Súčasne je zo Zeme vystrelené zvisle nahor iné teleso so začiatočnou rýchlosťou v_0 = 120 m.s^{-1}. Za aký čas a v akej výške nad Zemou sa obidve telesá stretnú?

Riešenie:

h = 60 m, v_0 =120 m.s^{-1}

h1 + h2 = h

$$\frac{1}{2}gt^2 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = h$$
$$v_0t = h$$
$$t = \frac{h}{v_0}$$
$$t = \frac{60m}{120m.s^{-1}} = 0{,}5s$$
$$t = 0{,}5s$$

$$h_2 = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$h_2 = 120m.s^{-1}.0{,}5s - 5.0{,}5^2m = 60m - 1{,}25m = 58{,}75m$$
$$h_2 = 58{,}75m$$

Telesá sa stretnú o 0,5s vo výške 58,75m nad Zemou.

3

Voľne padajúci kameň má v jednom bode svojej dráhy okamžitú rýchlosť 50 m.s^{-1} a v inom , nižšie položenom bode rýchlosť 80 m.s^{-1}. Za aký čas dopadne kameň z prvého bodu do druhého a ako ďaleko sú obidva body od seba vzdialené?

Riešenie:

v_1 = 50 m.s^{-1}, v_2 = 80 m.s^{-1}

$$\Delta t = \frac{v_2 - v_1}{g}$$
$$\Delta t = \frac{80m.s^{-1} - 50m.s^{-1}}{10m.s^{-2}} = \frac{30m.s^{-1}}{10m.s^{-2}} = 3s$$
$$\Delta t = 3s$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2}g\left(t_2^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}g\left[\left(\frac{v_2}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_1}{g}\right)^2\right]$$
$$\Delta s = \frac{1}{2}10\left[\left(\frac{80}{10}\right)^2 - \left(\frac{50}{10}\right)^2\right]m = 5\left[8^2 - 5^2\right]m = 5.(64 - 25)m = 195m$$
$$\Delta s = 195m$$

Kameň z prvého do druhého bodu dopadne za 3 sek. Vzdialenosť bodov je 195 metrov.

4 Akou veľkou rýchlosťou tryská vodný prúd z trubice fontány, ak voda dosahuje do výšky 20 m?

Riešenie:

h = 20 m, v = ?

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2\frac{g}{g} = \frac{1}{2}\frac{(gt)^2}{g} = \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow v = \sqrt{2.g.h}$$

$$v = \sqrt{2.10m.s^{-2}20m} = \sqrt{400m^2.s^{-2}} = 20m.s^{-1}$$

$$v = 20m.s^{-1}$$

Voda z fontány tryská rýchlosťou v = 20 $m.s^{-1}$

5 Lopta vrhnutá zvisle nahor sa vrátila do miesta vrhu za čas 2s. Do akej výšky vystúpila?

Riešenie:

2t = 2s

t = 1s - čas výstupu lopty

$$v = v_0 - g.t$$

$$0 = v_0 - g.t$$

$$v_0 = g.t$$

$$v_0 = 10m.s^{-2}1s = 10m.s^{-1}$$

$$v_0 = 10m.s^{-1}$$

$$h = \frac{1}{2}g.t^2 = \frac{1}{2}g.t^2.\frac{g}{g} = \frac{1}{2}.\frac{v_0^2}{g}$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$h = \frac{(10m.s^{-1})^2}{2.10m.s^{-2}} = \frac{100m^2s^{-2}}{20m.s^{-2}} = 5m$$

$$h = 5m$$

Lopta vystúpila do výšky 5m.

6

Z okna výškového domu vyhodil chlapec vodorovným smerom tenisovú loptičku, ktorá dopadla za 3 sekundy do vzdialenosti 15 m od domu. Určite výšku okna nad zemou a začiatočnú rýchlosť loptičky.

Riešenie:

d = 15 m, t = 3s

$$d = v_0 . t$$
$$v_0 = \frac{d}{t}$$
$$v_0 = \frac{15m}{3s} = 5m.s^{-1}$$

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$d^2 = v_0^2 \frac{2h}{g}$$
$$h = \frac{d^2 g}{2v_0^2}$$
$$h = \frac{15^2 m^2 10 m.s^{-2}}{2.5^2 m^2 . s^{-2}} = \frac{2250}{50} m = 45m$$
$$h = 45m$$

Začiatočná rýchlosť loptičky je $5m.s^{-1}$.Výška okna nad zemou je 45m.

7 Lietadlo zhadzuje bombu na loď. Lietadlo letí vo výške 320m nad morom rýchlosťou 180 $km.h^{-1}$. Loď sa pohybuje rýchlosťou 36 $km.h^{-1}$. V akej vzdialenosti od lode musí posádka lietadla bombu uvoľniť, aby táto trafila loď, ak sa lietadlo pohybuje

- a) rovnakým smerom ako loď
- b) opačným smerom ako loď

Riešenie:

v_1 = 180 $km.h^{-1}$= 50 $m.s^{-1}$, v_2 = 36 $km.h^{-1}$= 10 $m.s^{-1}$, h = 320m

Bomba padá za čas

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2.320m}{10m.s^{-2}}} = \sqrt{64.s^2} = 8s$$

Za čas 8s loď prejde dráhu s = v_2 .t =10 m.s^{-1}.8s = 80m
Ak by sa loď nehýbala

$$d = v_1\sqrt{\frac{2h}{g}} = 50m.s^{-1}\sqrt{\frac{640m}{10m.s^{-2}}} = 50.8m = 400m$$

- a) Lietadlo letí rovnakým smerom ako loď: x = d –s = 400m -80m = 320m pred loďou
- b) Lietadlo letí opačným smerom ako loď y = d + s = 400m+80m = 480m pred loďou

8

Vrhač vrhol guľou šikmo nahor počiatočnou rýchlosťou 10 m.s^{-1}. Porovnajte dĺžku vrhu pre elevačné uhly 30°, 45°, 60°.

Riešenie:

$\alpha = 30^0$:

$$d = \frac{v_0^2 .\sin 2\alpha}{g} = \frac{\left(10m.s^{-1}\right)^2 \sin 60^0}{10m.s^{-2}} = \frac{100m^2s^{-2}.0{,}866}{10m.s^{-2}} = 8{,}66m$$

$\alpha = 45^0$

$$d = \frac{v_0^2 .\sin 2\alpha}{g} = \frac{\left(10m.s^{-1}\right)^2 \sin 90^0}{10m.s^{-2}} = \frac{100m^2s^{-2}.1}{10m.s^{-2}} = 10m$$

$\alpha = 60^0$

$$d = \frac{v_0^2 .\sin 2\alpha}{g} = \frac{\left(10m.s^{-1}\right)^2 \sin 120^0}{10m.s^{-2}} = \frac{100m^2s^{-2}.0{,}866}{10m.s^{-2}} = 8{,}66m$$

Vzdialenosti sú však len teoretické, bez odporu vzduchu.

9

Teleso bolo vrhnuté šikmo nahor počiatočnou rýchlosťou v_0 = 30m.s^{-1}pod elevačným uhlom 50°.

- a) Určite jeho polohu v čase t = 1,5s.
- b) Akú najväčšiu výšku pri tom dosiahne.

Riešenie:

a) $x = v_0.t.\cos\alpha$

$x = 30m.s^{-1}.1,5s.\cos 50^0 = 30.1,5.0,64278m = 28,93m = 29m$

$$y = v_0.t.\sin\alpha - \frac{1}{2}g.t^2$$

$$y = 30m.s^{-1}.1,5s.\sin 50^0 - \frac{1}{2}10m.s^{-2}.(1,5s)^2 = 30.1,5.0,766m - 11,25m = 23,22m$$

$$b)\quad h = \frac{v_0^2.\sin^2\alpha}{2g}$$

$$h = \frac{(30m.s^{-1})^2.0,766^2}{2.10m.s^{-2}} = 26,4m$$

- a) Teleso v čase t = 1,5s bude vo vzdialenosti 29m od miesta vrhu, vo výške 23,22m
- b) Teleso pri vrhu dosiahne maximálnu výšku 26,4m.

10

Futbalová lopta bola vykopnutá z povrchu ihriska pod elevačným uhlom α = 450 a dopadla na jeho povrch vo vzdialenosti 40 m od miesta výkopu. Aká bola jej počiatočná rýchlosť a do akej maximálnej výšky pri tom lopta vyletela?

Riešenie:

$\alpha = 45^0$

$$d = \frac{v_0^2.\sin 2\alpha}{g}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{d.g}{\sin 2\alpha}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{40m.10m.s^{-2}}{\sin 90^0}} = \sqrt{\frac{400m^2.s^{-2}}{1}} = 20m.s^{-1}$$

$$h = \frac{v_0^2.\sin^2\alpha}{2g}$$

$$h = \frac{(20m.s^{-1})^2.\sin^2 45^0}{2.10m.s^{-2}} = \frac{400.0,707106781^2}{20}m = 10m$$

Počiatočná rýchlosť lopty bola $20m.s^{-1}$. Lopta by vyletela do maximálnej výšky 10m.

Pohyby v radiálnom gravitačnom poli

1 Charakterizujte radiálne gravitačné pole Zeme.

Riešenie:

Ak trajektória hmotného bodu pri pohybe v gravitačnom poli Zeme je porovnateľná s rozmermi Zeme, gravitačné pole je radiálne. Radiálne gravitačné pole je priestorovo neohraničené. Na rôznych miestach takéhoto poľa má gravitačné zrýchlenie rôzny smer, lebo stále smeruje do stredu Zeme a rozličnú veľkosť, ktorá závisí od vzdialenosti daného miesta od stredu Zeme. Príkladom pohybu v radiálne gravitačné pole Zeme sú pohyby umelých družíc Zeme, pohyby medzikontinentálnych striel a rakiet atď.

Na teleso o hmotnosti m pôsobí pri pohybe v gravitačnom poli Zeme

a) dostredivá sila:

$$F_d = \frac{m.v^2}{R_Z + h}$$

b) gravitačná sila:

$$F_g = \frac{\kappa.m.m_Z}{(R_Z + h)^2}$$

Teleso má

a) kinetickú energiu:

$$E_k = \frac{1}{2}m.v^2$$

b) potenciálnu energiu:

$$E_p = m.g.(R_Z + h) = m.\frac{\kappa.m_Z}{(R_Z + h)^2}(R_Z + h) = \frac{\kappa.m.m_Z}{R_Z + h}$$

Pre radiálne gravitačné pole Slnka platia tri Keplerove zákony:

1.) Planéty sa pohybujú okolo Slnka po elipsách malo odlišných od kružníc, v spoločnom ohnisku je Slnko.

2.) Plochy opísané sprievodičom planéty za rovnaký čas sú rovnaké.

3.) $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$ T_1, T_2 sú obežné doby dvoch planét, a_1, a_2 sú hlavné polosi ich trajektórií.

2

Vypočítajte prvú a druhú kozmickú rýchlosť.

Riešenie:

- a.) Prvá kozmická rýchlosť v_1

$$F_d = F_g$$
$$\frac{m.v_1^2}{R_Z + h} = \frac{\kappa.m.m_Z}{(R_Z + h)^2}$$
$$v_1^2 = \frac{\kappa.m_Z}{R_Z + h}$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z + h}}$$
$$h = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z}}$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}\, 6.10^{24} kg}{6{,}378.10^6 m}} = \sqrt{62{,}7469.10^6 m^2.s^{-2}} = 7{,}9.10^3 m.s^{-1}$$
$$v_1 = 7{,}9 km s^{-1}$$

-

- b.) Druhá kozmická rýchlosť v_2

$$E_k = E_p$$
$$\frac{1}{2} m.v_2^2 = \frac{\kappa.m.m_Z}{R_Z + h}$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{2.\kappa.m_Z}{R_Z + h}}$$
$$h = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2.\kappa.m_Z}{R_Z}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z}} = \sqrt{2}.v_1$$
$$v_2 = 1{,}41.7{,}9 km s^{-1}$$
$$v_2 = 11{,}2 km s^{-1}$$

-

- Prvá kozmická rýchlosť (kruhová) je v_1 =7,9 km.s^{-1}.
- Druhá kozmická rýchlosť (parabolická, úniková) je v_2 = 11,2 km.s^{-1}.Teleso sa trvale vzďaľuje od Zeme ale zostáva v gravitačnom poli Slnka.
- Tretia kozmická rýchlosť je v_3 = 16,7 km.s^{-1}. Teleso opúšťa gravitačné pole Slnka.

3 V istej dobe boli zo Zeme pozorované dve družice v rôznych výškach ($h_1 = R_Z$, $h_2 = 2R_Z$), ktoré sa pohybovali po kruhových trajektóriách rovnakým smerom. Určite ich rýchlosti. v1 = 7,9 km.s^{-1}

Riešenie:

$$a.)\ h = R_Z:\quad u_1 = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z+h}} = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z+R_Z}} = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{2.R_Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.v_1$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \frac{7{,}9 kms^{-1}}{1{,}41} = 5{,}6 kms^{-1}$$

$$b.)\ h = 2R_Z\ :\ u_2 = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z+h}} = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z+2R_Z}} = \sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{3R_Z}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\kappa.m_Z}{R_Z}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.v_1$$

$$u_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}} = \frac{7{,}9 kms^{-1}}{1{,}73} = 4{,}56 kms^{-1}$$

Rýchlosti družíc sú u1 = 5,6 km.s^{-1} a u2 = 4,56 km.s^{-1}.

4

Určite parabolickú (druhú kozmickú) rýchlosť na povrchu Mesiaca. m_M=7,41.10^{22} kg, R_M=1,736.10^{6} m

Riešenie:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2.\kappa.m_M}{R_M}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2.6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}.7{,}41.10^{22} kg}{1{,}736.10^6 m}} = \sqrt{5{,}694.10^6 m^2.s^{-2}} = 2{,}38\ .10^3 m.s^{-1}$$

$$v_2 = 2{,}38 kms^{-1}$$

$$v_2 = 2{,}4 kms^{-1}$$

Druhá kozmická rýchlosť na povrchu Mesiaca je v_2 = 2,4 km.s^{-1}

5 Hmotnosť Slnka je m_S =1,989 10^{30} kg. Rýchlosť obehu Zeme okolo Slnka je v = 29,82 $km.s^{-1}$. V akej vzdialenosti obieha Zem okolo Slnka?

Riešenie:

m_S =1,989 10^{30} kg, v = 29,82 $km.s^{-1}$= $29,82.10^3$ $m.s^{-1}$

$$\frac{m_Z.v^2}{r} = \frac{\kappa.m_Z.m_S}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{\kappa.m_S}{r}$$

$$r = \frac{\kappa.m_S}{v^2}$$

$$r = \frac{6{,}67.10^{-11}\,N.m^2kg^{-2}.1{,}989.10^{30}\,kg}{\left(29{,}82.10^3\,m.s^{-1}\right)^2} = 149.10^9\,m$$

$$r = 149.10^6\,km = 149\ \text{miliónov kilometrov}$$

r (presne) = 149 597 900 km

Môže sa použiť zaokrúhlená hodnota AU = 150.10^6 km. Je to „astronomická jednotka“.

6

Mesiac obieha okolo Zeme vo vzdialenosti 384 000 km. a má hmotnosť $7{,}41.10^{22}$ kg. Na spojnici stredov obidvoch telies nájdite bod C, v ktorom by bol človek v beztiažovom stave. V tomto bode sa gravitačná sila Zeme rovná gravitačnej sile Mesiaca.

Riešenie:

ZM = l =384 000 km, $m_M = 7{,}41.10^{22}$ kg, $m_Z = 5{,}97.10^{24}$ kg,
ZC = x, CM = l – x, $m_č$ = hmotnosť človeka

$$F_{g,Z} = F_{g,M}$$

$$\frac{\kappa.m_Z.m_č}{x^2} = \frac{\kappa.m_M.m_č}{(l-x)^2}$$

$$\frac{m_Z}{x^2} = \frac{m_M}{(l-x)^2}$$

$$\frac{x^2}{(l-x)^2} = \frac{m_Z}{m_M}$$

$$\frac{x^2}{(l-x)^2} = \frac{5{,}97.10^{24}kg}{7{,}41.10^{22}kg}$$

$$\frac{x^2}{(l-x)^2} = 80{,}56 = 81$$

$$\frac{x}{l-x} = 9$$

$$x = 9l - 9x$$

$$x = \frac{9}{10}l = \frac{9}{10}384\,000km = 345600\,km$$

$$l - x = 38\,400km$$

Hľadaný bod C (libračný, Lagrangeov bod) je vo vzdialenosti 345 600 km od Zeme a 38 400 km od Mesiaca.

7

Najväčšia planéta Slnečnej sústavy Jupiter obieha okolo Slnka vo vzdialenosti $7{,}8.10^{8}$ km. Hmotnosť Slnka je $1{,}989.10^{30}$ kg. Akú hmotnosť má Jupiter, ak ho Slnko priťahuje gravitačnou silou $F_g = 4{,}2.10^{23}$ N? Aké veľké zrýchlenie udeľuje Slnko Jupiteru? Aký je obežný čas (perióda T) Jupitera okolo Slnka?

Riešenie:

a.) Hmotnosť Jupitera:

$$F_g = \frac{\kappa . m_S . m_J}{r^2}$$

$$m_J = \frac{F_g . r^2}{\kappa . m_S}$$

$$m_J = \frac{4{,}2.10^{23}.(7{,}8.10^{11} m)^2}{6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}.1{,}989.10^{30} kg} = 1{,}9.10^{27} kg$$

b.) Zrýchlenie Jupitera:

$$F_g = m_J . a$$

$$a = \frac{F_g}{m_J}$$

$$a = \frac{4{,}2.10^{23} N}{1{,}9.10^{27} kg} = 2{,}2.10^{-4} m.s^{-2}$$

c.) Obežná doba Jupitera okolo Slnka

$$F_0 = F_g$$

$$\frac{m_J . 4.\pi^2 . r}{T^2} = F_g$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 m_J . r}{F_g}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4.9{,}86.7{,}8.10^{11} m.1{,}9.10^{27} kg}{4{,}2.10^{23} N}} = \sqrt{13{,}9.10^{16} s^2} = 3{,}73.10^8 s = 373\ 000\ 000 s =$$

$$= 6\ 216\ 666 \min = 103\ 611 hod = 4\ 317 dni = 11{,}8 roka$$

Hmotnosť Jupitera je $1{,}9.10^{27}$kg, jeho zrýchlenie $2{,}2.10^{-4}$ m.s-2. Obežná doba Jupitera okolo Slnka je 11,8 rokov (pozemských)

8

V akej výške h nad Zemou sa musí umiestniť stacionálna družica, ktorá sa nachádza nad tým istým miestom nad povrchom Zeme?

Riešenie:

$m_Z = 6.10^{24}$ kg, $R_Z = 6{,}378.10^6$m, T_Z = 23hod. 56min. 4sek = $8{,}6164.10^4$s

m_D = hmotnosť družice

$$F_g = F_{od}$$

$$\frac{\kappa . m_D . m_Z}{(R_Z + h)^2} = m_D . \omega^2 (R_Z + h)$$

$$\kappa . m_Z = \frac{4\pi^2}{T_Z^2} (R_Z + h)^3$$

$$R_Z + h = \sqrt[3]{\frac{\kappa . m_Z T_Z^2}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{\kappa . m_Z T_Z^2}{4\pi^2}} - R_Z$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}.6.10^{24} kg.(8{,}6164.10^4 s)^2}{4.3{,}14^2}} - 6{,}378.10^6 m = \sqrt[3]{75{,}3372.10^{21} m^2} - 6{,}378.10^6 m =$$

$$= 42{,}234.10^6 m - 6{,}378.10^6 m = 42\ 234 km - 6\ 378 km = 35856 km$$

-

Stacionárnu družicu treba umiestniť do výšky 35 856 km nad Zemou.

9 Pomocou Keplerových zákonov zistite:

- a.) Aká je stredná vzdialenosť planéty Venuša od Slnka, ak jej doba obehu okolo Slnka je T_V=0,615 roka.
- b.) Aké je doba obehu planéty Merkúr okolo Slnka, ak jej stredná vzdialenosť od Slnka je a_M = 0,387AU

Riešenie:

$T_V = 0{,}615$ roka, $a_M = 0{,}387AU$, $T_Z = 1$ rok, $a_Z = 1AU = 150.10^6$ km.

a.)

$$\frac{T_Z^2}{T_V^2} = \frac{a_Z^3}{a_V^3}$$

$$\frac{1}{0{,}615^2} = \frac{1}{a_V^3}$$

$$a_V = \sqrt[3]{0{,}615^2} = \sqrt[3]{0{,}378225} = 0{,}72318AU$$

$$a_V = 0{,}72318AU = 108{,}5.10^6 km$$

b.)

$$\frac{T_Z^2}{T_M^2} = \frac{a_Z^3}{a_M^3}$$

$$\frac{1}{T_M^2} = \frac{1}{0{,}387^3}$$

$$T_M = \sqrt{0{,}387^3} = \sqrt{0{,}05796} = 0{,}24 roka$$

$$T_M = 0{,}24 roka = asi\ 88 dní$$

- Vzdialenosť Venuše od Slnka je asi 108,5.106 km.
- Obežná doba Merkúru okolo Slnka je asi 88 dní.

10

Kozmická loď štartuje zo stacionárnej obežnej stanice umiestnenej vo výške h = 35 856 km nad Zemou (viď príkl. č.8) smerom na Mesiac. Za aký čas sa kozmická loď dostane do oblasti Mesiaca?

Riešenie:

T_M = 27,32 dňa, a_M = 384 400 km = $3{,}844.10^8$m, h = $0{,}35856.10^8$m
T_K = ?

$$a_K = \frac{a_M + h}{2} = \frac{3{,}844.10^8 m + 0{,}358.10^8 m}{2} = 2{,}1.10^8 m$$

$$\frac{a_M^3}{a_K^3} = \frac{T_M^2}{T_K^2}$$

$$T_K = T_M \sqrt{\frac{a_K^3}{a_M^3}}$$

$$T_K = 27{,}32\sqrt{\frac{\left(2{,}1.10^8\right)^3}{\left(3{,}844.10^8\right)^2}} = 27{,}32\sqrt{\frac{2{,}1^3}{3{,}844^3}} = 27{,}32\sqrt{0{,}163} = 27{,}32.0{,}4037 = 11{,}03d$$

$$T_K = 11{,}03d$$

$$t = \frac{T_K}{2}$$

$$t = \frac{11{,}03d}{2} = 5{,}52d$$

Čas 11,03 dňa je perióda celej dráhy kozmickej lode. Cesta zo Zeme na Mesiac trvá polovicu tejto periódy, čiže asi 5,52 dňa.